

# **ECP option MAE, Examen du cours « Endommagement et Rupture des matériaux »**

C. Kazymyrenko, J. Laverne

*15 mars 2013, durée 3 heures*

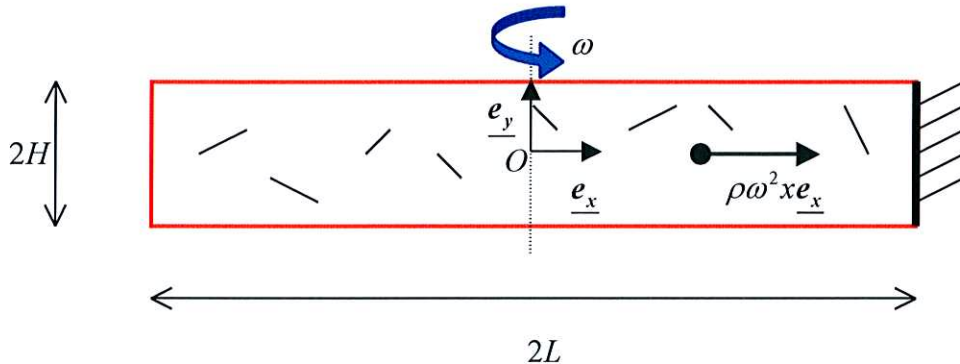
## **Exercice 1 : Questions de cours**

1. Quelle grandeur caractérise la nocivité (dangerosité) d'une fissure existante ? Comment l'obtient on ? Est-ce une quantité globale ou locale ?
2. Quelle grandeur matériau rend compte de la résistance à la rupture fragile ? quelle est son unité ?
3. Donner la définition du critère d'Irwin et ses principales limitations.
4. Expliquer les trois principes de la loi de Griffith
5. Quels sont les principales lacunes de la théorie de Griffith comblées par les modèles cohésifs ?
6. Pourquoi les modèles cohésifs sont généralement plus performants numériquement que les modèles d'endommagement ?
7. Comment se transpose le deuxième principe de la thermodynamique pour le modèle standard généralisé ?
8. Soit une loi de comportement développée dans le cadre du principe variationnel (minimisation d'énergie). Est-elle compatible avec le second principe de la thermodynamique ? Pourquoi ?
9. Quel est le défaut principal de la modélisation d'endommagement régularisé par le gradient de déformation (GRAD\_EPSI) ?
10. Quel problème peut-on avoir si l'on introduit une loi à seuil avec la zone élastique qui a) n'est pas convexe, b) n'est pas dérivable ?
11. Donner une interprétation physique de la  $Tr(\varepsilon)$ .
12. Pourquoi dans les modèles d'endommagement asymétriques en traction-compression on introduit souvent la discontinuité via la fonction de Heaviside de la  $Tr(\varepsilon)$  ou de la  $Tr(\sigma)$  ?

## Exercice 2, Etude de la nocivité d'une pièce en rotation

Soit une plaque mince élastique de dimension  $[-L, L] \times [-H, H]$  dans le plan défini par le repère  $(\underline{e}_x, \underline{e}_y)$  centré en  $O$ , contenant des petites fissures disposées aléatoirement et dont la taille maximale est  $a_c$ . Les conditions aux limites du problème mécanique sont les suivantes :

- Bords  $y = \pm H$  et  $x = -L$  libres
- Bord  $x = L$  encasté
- Chargement volumique de rotation autour de l'axe  $O\underline{e}_y$  avec une vitesse angulaire  $\omega$



Le but de l'exercice est d'une part de déterminer la vitesse angulaire critique  $\omega_c$  au-delà de laquelle il y a risque de rupture et d'autre part de déterminer quelles fissures sont les plus dangereuses (position et orientation).

On pose par hypothèse  $\nu = 0$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}) = \sigma(x)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$  et  $\underline{U}(\underline{X}) = u(x)\underline{e}_x$  avec  $\underline{X} = (x, y)$ . Le comportement de la plaque est linéaire élastique isotrope :  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{X}) = E\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{X})$

- 1) Ecrire l'équilibre du problème mécanique.
- 2) A partir du comportement et de la compatibilité des déformations en déduire la contrainte  $\sigma(x)$  sur chacune des parties de la plaque  $x \in [-L, 0]$  et  $x \in [0, L]$ .
- 3) Déterminer les valeurs et les positions de traction et de compression extrêmes.
- 4) On suppose que les fissures sont plongées dans un milieu infini et quelles sont soumises à un chargement lointain  $\sigma(x)$ . A partir des valeurs des facteurs d'intensité des contraintes et de la formule d'Irwin, déterminer le taux de restitution  $G$  en fonction de  $\omega$  et de la longueur des fissures  $a$  sur chacune des parties de la plaque  $x \in [-L, 0]$  et  $x \in [0, L]$ . On fera attention au fait que la valeur du facteur d'intensité des contraintes en ouverture est différente en traction et en compression.
- 5) A partir des valeurs maximales de  $G$  en traction et en compression déterminer la position et l'orientation des fissures les plus dangereuses.
- 6) Si on note  $K_{IC}$  la ténacité du matériau, déterminer la vitesse angulaire critique au-delà de laquelle il y a risque de rupture.

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$(x-l)(x+2l)$$

$$\left( x^3 - 3x^2l + 2l^3 \right) = \left( x-l \right) \left( x^2 + lx - 2l^2 \right)$$

$$3x^2 - 3l^2 \Rightarrow x^2 = l^2 \Rightarrow x = \pm l$$

$$= x^3 + lx^2 - 2l^2x - lx^2 - l^2x + 2l^3$$

### Exercice 3, Rupture cohésive d'une poutre encastrée.

Soit une poutre élastique (de module d'Young  $E$  et de coefficient de Poisson nul) homogène isotrope de longueur  $L$  et de section  $S$  encastrée en  $x=0$ , à laquelle on applique un déplacement imposé  $U$  en  $x=L$ .



Compte tenu des dimensions de la poutre on se ramène à un problème unidimensionnel dans la direction  $\underline{e}_x$ . Le déplacement est donné par  $u(x)\underline{e}_x$ , et le tenseur des contraintes :  $\sigma(x)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$ .

On considère dans un premier temps que la poutre ne peut se rompre,

- 1) Déterminer la contrainte, la déformation et le déplacement de la poutre.
- 2) Déterminer la réponse globale élastique de la poutre  $U(F)$  où  $F$  désigne la force associée au chargement en  $x=L$ .

On suppose maintenant que la rupture de la poutre est régie par la densité d'énergie de surface cohésive  $\psi$  définie de la façon suivante :

$$\psi(\llbracket u \rrbracket) = G_c \left( 1 - \exp\left(-\frac{\sigma_c}{G_c} \llbracket u \rrbracket\right) \right)$$

où  $\llbracket \cdot \rrbracket$  correspond à l'opérateur saut,  $G_c$  la densité d'énergie de surface critique et  $\sigma_c$  la contrainte critique d'amorçage.

- 3) Compte tenu de la géométrie de la poutre, de son comportement et des conditions aux limites appliquées, y aura-t-il une position où l'amorçage sera privilégié ? expliquer pourquoi ?
- 4) Expliciter la loi cohésive reliant la contrainte cohésive  $\tilde{\sigma}$  au saut de déplacement  $\llbracket u \rrbracket$ .
- 5) Déterminer la force critique  $F_c$  et le chargement critique  $U_c$  au moment de l'amorçage.
- 6) En considérant que le saut de déplacement ajouté à l'allongement de la poutre est égal au déplacement imposé  $U$ , déterminer la réponse globale de la poutre  $U(F)$ .
- 7) En considérant le signe de  $U'$  à l'amorçage, identifier les deux types des réponses adoucissantes possibles en fonction d'une longueur matériau  $l$  que l'on déterminera.
- 8) Commenter les deux types de réponse, à quelle type de rupture correspondent-elles ?
- 9) Ces types de rupture sont-elles réalistes en statique ? quel type d'énergie faudrait-il ajouter pour rendre compte plus précisément de la rupture d'une telle structure ?

On suppose maintenant que la poutre a un comportement élastoplastique avec un écrouissage linéaire isotrope et une limite d'élasticité  $\sigma_y$ . La rupture est toujours régie par le comportement cohésif.

- 10) Expliquer les différents comportements possibles de la poutre en fonction des valeurs relatives de  $\sigma_y$  et  $\sigma_c$ .

**Exercice 4, Notions de sous-gradient et de la transformation Legendre-Fenchel**

Calculer la transformation de Legendre-Fenchel  $f^*(p) = \sup_x (px - f(x))$ , pour les fonctions suivantes :

1)  $f(x) = x^4 / 4$

2)  $f(x) = |x - 1|$

3)  $f(x) = x^2$  pour  $x \in [-2, 1]$

4)  $f(x) = \max(0, x)$

5)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ x^2 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$

Calculer le sous-gradient  $y \in \partial D(x) \Leftrightarrow D(\bar{x}) - D(x) \geq y(\bar{x} - x)$ ,  $\forall \bar{x}$ , pour les fonctions suivantes :

6)  $f(x) = x^4$

7)  $f(x) = |x - 1|$

8)  $f(x) = \max(0, x)$

9)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ x^2 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$

Peut-on calculer la transformation de Legendre-Fenchel pour la fonction suivante, pourquoi ?

10)  $f(x) = |x^2 - 1|$

### **Exercice 5, Formulation énergétique du modèle d'endommagement**

Le modèle d'endommagement sans régularisation est défini par son énergie libre :

$$\Phi(\varepsilon, a) = \frac{1}{2} A(a) \mathbf{E} \varepsilon : \varepsilon + \omega(a)$$

Où  $\mathbf{E}$  est un tenseur de Hooke:

$$\mathbf{E} \varepsilon \equiv \frac{E}{1+\nu} \left( \varepsilon + \frac{\nu}{1+\nu} \text{Tr}(\varepsilon) \mathbf{I} \right)$$

1. Quel est l'équation qui définit le domaine élastique du matériau (domaine où l'endommagement n'évolue pas) ?
2. Comment cela se représente pour une modélisation en contraintes planes dans l'espace des contraintes principales ? Quelle figure géométrique décrit-il ? Dessiner cette zone élastique.
3. Comment cela se présente pour une modélisation 3D dans l'espace des déformations principales.

La loi ENDO\_ISOT\_BETON, implémentée dans Aster, utilise les fonctions de perte de rigidité et de dissipation suivantes :

$$\frac{\partial \Phi(\varepsilon, a)}{\partial a} \dot{a} = 0; \text{ avec } \dot{a} \geq 0$$
$$A(a) = \frac{1-a}{1+\gamma a}$$
$$\omega(a) = ka$$

4. Comment évolue la variable d'endommagement en fonction de la déformation si on est sur le seuil ?
5. Tracer la contrainte en fonction de déformation pour cette loi dans le cas d'une traction simple 1D. Est-ce une loi adoucissante ou durcissante ?
6. Calculer l'énergie dissipée par unité de volume endommagé :  $\int \sigma(\varepsilon) d\varepsilon$
7. Comment peut-t-on définir la taille de maille si l'on procède à la régularisation de Hillerborg.

### **Exercice 6, Modèle standard généralisé d'endommagement régularisé.**

Soit une loi de comportement écrite dans le cadre des modèles standards généralisés. L'énergie libre dépend du champs de déformation  $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$ , de son gradient et du champ d'endommagement scalaire  $a(x)$ . (On suppose que le module d'Young  $E$  est un scalaire).

$$F_{\Phi}(\boldsymbol{\varepsilon}, a) = \int_{\Omega} \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}(x), a(x)) dx - W_{ext}$$

$$\text{où } \Phi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}(1-a)^2 E \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\varepsilon} + \frac{c}{2} \nabla \boldsymbol{\varepsilon} : \nabla \boldsymbol{\varepsilon}$$

1. Que valent les efforts généralisés  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, a)$  et  $\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\varepsilon}, a)$ . Lequel des deux peut être calculé localement ?
2. Pourquoi introduit-on le terme en gradient ?

La loi d'écoulement (évolution de la variable interne) est pilotée par le potentiel de dissipation :

$$D(\dot{a}) = k |\dot{a}|, \quad k > 0$$

3. Calculer la transformation de Legendre-Fenchel du potentiel de dissipation.
4. Calculer les sous-gradients du potentiel de dissipation et de sa transformation.
5. Comment s'écrit la loi d'écoulement et sa version duale  $\dot{a}(\boldsymbol{\Sigma})$  et  $\boldsymbol{\Sigma}(\dot{a})$  ? vérifier que cela donne les mêmes équations.
6. Donner l'équation de la zone élastique initiale dans l'espace des déformations. Quel objet géométrique cela représente-t-il ? Dessiner la en 2D (déformations planes).
7. Ce modèle est-il symétrique en traction-compression ?

On considère une solution homogène dans l'espace à une dimension.

8. Ecrire la réponse force-déplacement  $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})$  pour cette loi.
9. Quel sens physique peut-on donner au paramètre  $k$  ?

Contrôle de ..... Endommagement et rupture des matériaux ..... le 15 / 03 / 2013 ..

Nom et Prénoms : Cécile Roussel .....

Signature :  .....

Exercice 1

1. la ténacité  $K_{Ic}$ , facteur d'intensité de contraintes en mode I, et sa comparaison au critère d'Irwin  $K_I \leq K_{Ic}$  caractérisent la nocivité d'une fissure existante.

on a  $K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \alpha$

et  $K_{Ic}$  caractéristique du matériau et de la température.

C'est une grandeur locale, et ce critère n'est applicable qu'en mode I pur pour un matériau isotrope.

2. le  $\sigma_c$ , contraintes critiques, rend compte de la résistance à la rupture du matériau fragile.

On a  $\sigma \leq \sigma_c$  pour un matériau fragile (élastique puis rupture)

$\sigma_c$  est mesuré en MPa.

Plus  $\sigma_c$  est faible, moins le matériau est résistant.

3. Critère d'Irwin :  $K_I \leq K_{Ic}$

$$\begin{cases} K_I < K_{Ic} : \text{pas de propagation} \\ K_I = K_{Ic} : \text{propagation possible} \end{cases}$$

Le critère d'Irwin ne s'applique pas pour les matériaux anisotropes et les fissures en mode autre que le mode I pur.

Il n'est donc valable qu'en très peu de cas. On n'obtient

pas non plus de loi d'évolution complète de la fissure

#### 4. Loi de Griffith

1) irréversibilité de la fissure :  $t' > t \Rightarrow \Gamma(t') \supset \Gamma(t)$   
 $\Gamma$  étant la zone de fissure.

la fonction  $t \mapsto \Gamma(t)$  est croissante au sens de l'inclusion.

2) stabilité.

si  $\exists \delta \Gamma$  tel que  $-\delta P > \delta D$ , alors état instable de la fissure : propagation brutale

si  $\forall \delta \Gamma$ ,  $-\delta P \leq \delta D$ , état stable, fissure progressive.

où  $P$  : énergie potentielle

$D$  : énergie de surface.

3) bilan d'énergie

pendant la propagation contrôlée,  $-\delta P = \delta D$ .

si  $-\delta P < \delta D$ , pas de propagation.

Si l'état de la fissure ne dépend que d'un paramètre  $l$ , alors la loi de Griffith devient :

$$\begin{cases} \dot{l} \geq 0 \\ G \leq G_c \\ (G - G_c) \dot{l} = 0 \end{cases}$$

5. la théorie de Griffith ne permet pas de déceler l'aravage d'une fissure, de prendre en compte la plasticité, de donner l'orientation de la fissure. Elle ne traite que d'évolution progressive.

Dans un modèle cohésif, on remplace le critère de propagation par un critère de minimisation d'énergie totale, avec prise en compte d'une énergie de surface cohésive.



6. les modèles d'endommagement sont sensibles à la finesse du maillage (le trajet de fissure en dépend), les solutions ne sont pas uniques, la convergence est difficile et les calculs très long.

7. Pour le modèle standard généralisé, la loi est basée sur le second principe de thermodynamique: l'état d'endommagement est défini en imposant la dissipation positive

On utilise un potentiel de dissipation  $D$ :

$$\varepsilon = \frac{\partial D(\dot{\alpha})}{\partial \dot{\alpha}} \quad \Leftrightarrow \quad \dot{\alpha} = \frac{\partial D^*(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}$$

$D$  pilote l'écoulement,  $\dot{\alpha}$  est l'écoulement

8. Principe variationnel

{ énergie libre dépend du paramètre d'endommagement  
minimisation.

$$F_\phi(\varepsilon, \alpha) = \int_{\Omega} \phi(\varepsilon, \alpha) dx - W_{ext}$$

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial \varepsilon} = 0 \Rightarrow \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \varepsilon} : \text{loi de comportement.}$$

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial \alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} \cdot \dot{\alpha} = 0 : \text{minimisation sans contrainte}$$

$$\dot{\alpha} = \frac{\partial D(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \Rightarrow \dot{\alpha} \geq 0 : \text{loi d'écoulement unilatérale.}$$

9. les défauts de la modélisation d'endommagement régularisé par le gradient de déformation (GRAD-EPSI) sont:

1) nombre de degrés de liberté doublés, matrice tangente moins creuse

2) étalement non physique de la zone d'endommagement

10. a) Quand la zone élastique n'est pas convexe, elle devient non dérivable  $\rightarrow$  problème de discrétisation.

e) Quand la zone élastique n'est pas dérivable, il y a un problème de discrétisation :  $f(a + \Delta a, E + \Delta E)$ .  $\Delta a = 0$ .  
la discrétisation du chargement change la solution.

11. la  $\epsilon(E)$  est la variation volumique du matériau.

$$\epsilon(E) = \frac{du_1}{dx_1} + \frac{du_2}{dx_2} + \frac{du_3}{dx_3}$$

12. fonction de Heaviside :  $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$   
donc pour obtenir un modèle d'endommagement

en traction et compression (dépend du signe de  $\epsilon(E)$ )

on choisit l'endommagement suivant :

$$(A(a) - B(a))H(\epsilon(E)) + B(a)$$

ainsi : traction  $\epsilon(E) > 0 \Rightarrow A(a)$

compression  $\epsilon(E) < 0 \Rightarrow B(a)$

## Exercice 2

on a 
$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{E} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \quad \epsilon = \frac{du}{dx}$$

1). équilibre mécanique  $\text{div } \sigma + f = 0$ .

ici,  $f = \rho \omega^2 x e_x$ .

$$\text{div } \sigma = \frac{d\sigma}{dx}$$

donc 
$$E \frac{d^2 u}{dx^2} + \rho \omega^2 x = 0.$$

$$CL: \begin{cases} \text{pour } x > 0 \\ u(L) = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{pour } x < 0 \\ u(0) = 0 \\ \sigma(-L) = 0 \end{cases}$$

$$2) \quad u^+(x) = -\frac{p\omega^2}{6E} x^3 + Ax + B$$

$$u^+(0) = B = 0$$

$$u^+(L) = 0 = -\frac{p\omega^2}{6E} L^3 + AL \Rightarrow A = \frac{p\omega^2}{6E} L^2$$

$$u^+(x) = \frac{p\omega^2}{6E} x(L^2 - x^2)$$

$$\sigma^+(x) = \frac{p\omega^2}{6} (L^2 - 3x^2)$$

$$u^-(x) = -\frac{p\omega^2}{6E} x^3 + Ax + B$$

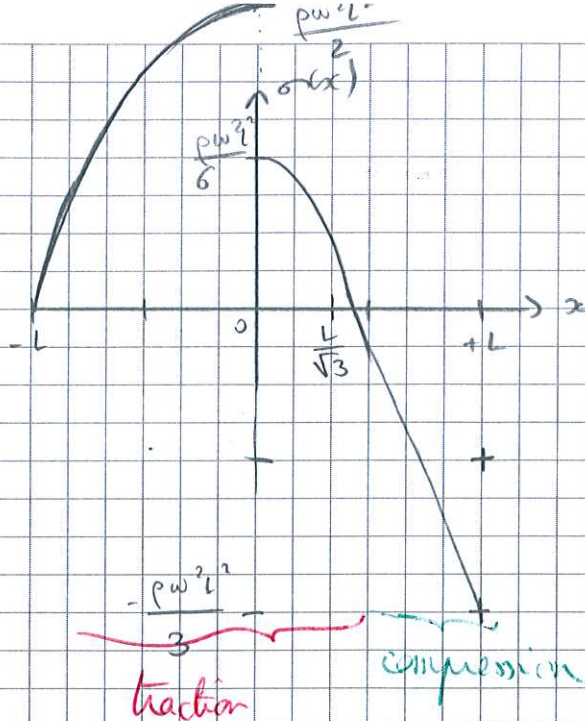
$$u^-(0) = 0 = B$$

$$\sigma^-(-L) = 0 = -\frac{p\omega^2}{6} 3L^2 + AE$$

$$u^-(x) = \frac{p\omega^2}{6E} x(3L^2 - x^2)$$

$$\sigma^-(x) = \frac{p\omega^2}{2} (L^2 - x^2)$$

2/2



0,5/1

3) traction extrême en  $x = 0^-$  dans  $\sigma^-$ .

$$\sigma_{\max} = \frac{p w^2 L^2}{2}$$

compression extrême en  $x = +L$  dans  $\sigma^+$ .

$$\sigma_{\max} = -\frac{p w^2 L^2}{3}$$

2/2

4)  $G = \frac{V_I^2 + V_{II}^2}{E}$

en traction:  $G = \frac{\sigma_{\max}^2 \pi a \cos^2 \alpha}{E}$   
 $x \geq \frac{L}{\sqrt{3}}$

en compression:  $G = \frac{\sigma_{\max}^2 \pi a \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha}{E}$   
 $x \geq \frac{L}{\sqrt{3}}$

sur  $[\frac{L}{\sqrt{3}}, L]$ : compression

$$G = \frac{p^2 w^4 \pi a}{36 E} (L^2 - 3x^2)^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

sur  $[\frac{L}{\sqrt{3}}, 0]$ : traction

$$G = \frac{p^2 w^4 \pi a}{36 E} (L^2 - 3x^2)^2 \cos^2 \alpha$$

sur  $[-L, 0]$ : traction

$$G = \frac{p^2 w^4 \pi a}{4 E} (L^2 - x^2)^2 \cos^2 \alpha$$

1/A 5). en traction :  $\begin{cases} \alpha = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  du côté  $x < 0$ .

en compression :  $\begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{2} \\ x = +L \end{cases}$ .

1/A 6).  $K_{IC}$  en mode I pur.

$$K_{IC} = \sigma \sqrt{\pi a} \propto \omega^2$$

$$K_{IC} = \frac{\rho \omega^2}{2} L^2 \sqrt{\pi a}$$

$$\omega_c^2 = \frac{2K_{IC}}{\rho L^2 \sqrt{\pi a}}$$

### Exercice 3

1/A 1).  $\begin{cases} u(x) \\ u(0) = 0 \\ u(L) = 0 \end{cases}$

div  $\sigma = 0 \Rightarrow u(x) = Ax + B$ .

$$\text{donc } \begin{cases} u(x) = \frac{U}{L} x \\ E(x) = \frac{U}{L} \\ \sigma(x) = \frac{EU}{L} \end{cases}$$

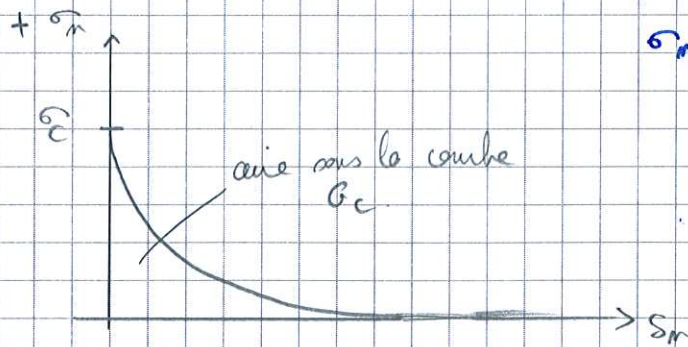
1/A 2).  $\sigma(L) = \frac{F}{S}$

$$\text{donc } \frac{F}{S} = \frac{EU}{L}$$

$$\boxed{U(F) = \frac{L}{SE} F}$$

1/A 3) on a des contraintes homogènes dans la poutre, il n'y a pas de position d'amorçage privilégiée. la rupture peut se produire n'importe où.

4)



$$\sigma_m = \Psi'(\delta_m) = +G_c \times \frac{G_c}{\sigma_c} \exp\left(-\frac{G_c}{\sigma_c} \delta_m\right)$$

$$\delta_m = (U)$$

$$\delta_m = -\ln\left(\frac{\sigma_m}{G_c}\right) \times \frac{G_c}{\sigma_c}$$

Pour modéliser la fissure, on suppose qu'il y a une contrainte sur les bords de la fissure:  $\sigma_m$ , fonction du saut de déplacement

5)

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S}$$

$$F_c = S \sigma_c$$

$$U_c = \frac{L \sigma_c}{E}$$

6)

$$U = \frac{FL}{SE} - \frac{G_c}{\sigma_c} \ln\left(\frac{\sigma_m}{\sigma_c}\right)$$

$$U(F) = \frac{FL}{SE} - \frac{G_c}{\sigma_c} \ln\left(\frac{F}{F_c}\right)$$

7)

$$U'(F) = \frac{L}{SE} - \frac{G_c}{\sigma_c F}$$

$$U'(F) > 0 \Rightarrow \frac{L}{SE} - \frac{G_c}{\sigma_c F} > 0$$

$$L > \frac{G_c E}{\sigma_c^2}$$

cas de la fissure instable: max load pour  $L > \frac{G_c E}{\sigma_c^2}$

$$U'(F) < 0 \Rightarrow \frac{L}{SE} - \frac{G_c}{\sigma_c F} < 0 \Rightarrow L < \frac{G_c E}{\sigma_c^2}$$

1/1

1/1

2/2

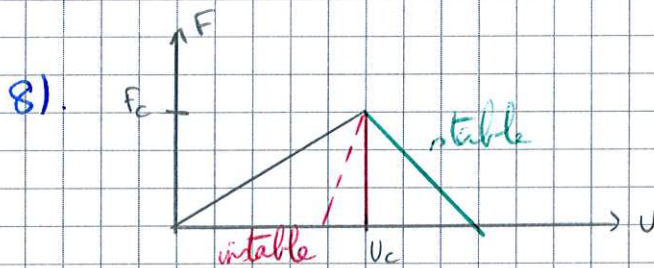
2/2

La réponse dépend de la longueur de la poutre.

on pose  $l = \frac{G_c E}{\sigma_c^2}$

si  $L > l$  : snap lock : retour brutal arrière

si  $L < l$  : fissuration progressive



0,5/1

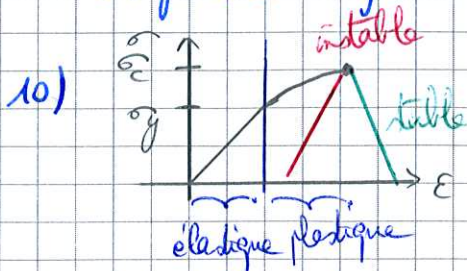
$L > l$  : instable correspond au cas fragile avec rupture immédiate.

$L < l$  : plasticité.

9). Les ruptures ne sont pas réalisées en statique.

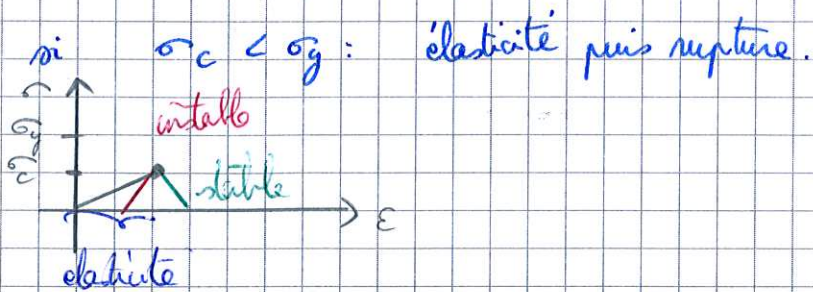
Il faudrait ajouter une énergie de surface

0/1



1/1

si  $\epsilon > \sigma_y$  : élastique, puis plastique, puis rupture



exercice 4

1).  $f(x) = \frac{x^4}{4}$

$\rho x - \frac{x^4}{4} = 0 \Rightarrow \rho - x^3 = 0$   
 $\Rightarrow x = \rho^{1/3}$

donc  $f^*(\rho) = \rho^{4/3} - \frac{\rho^{4/3}}{4}$

$f^*(\rho) = \frac{3}{4} \rho^{4/3}$

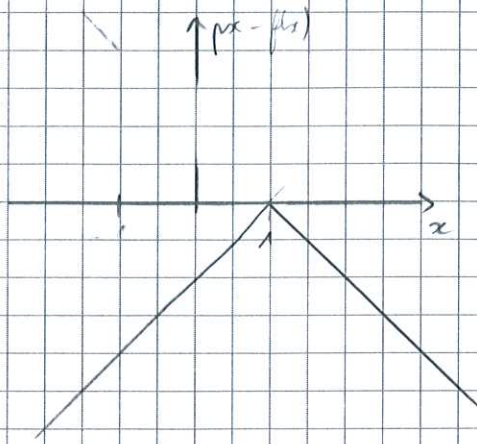
2)  $f(x) = |x-1|$

$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1 \\ 1-x & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$\rho x - f(x) = \begin{cases} \rho x - x + 1 & \text{si } x > 1 \\ \rho x + x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

$x > 1$ : si  $\rho - 1 < 0$ ,

alors  $x = 1$   
 et  $f^*(\rho) = \rho$ .



$x < 1$ , si  $\rho + 1 > 0$

alors  $x = 1$

$f^*(\rho) = \rho$

donc  $f^*(\rho) = \begin{cases} \rho \\ +\infty \end{cases}$  si sinon  $\rho \in [-1, 1]$



$$3) f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-2, +1) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$px - x^2 = \begin{cases} px - x^2 & \text{si } x \in [-2, 1] \\ -\infty & \end{cases}$$

$$f^*(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{4} & \text{si } p \in [-4, 2] \\ -2p - 4 & \text{si } p < -4 \\ p - 1 & \text{si } p > 2 \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } ]-\infty, 0[ \\ x & \text{sur } [0, +\infty[ \end{cases}$$

$$px - f(x) = \begin{cases} px & \text{sur } ]-\infty, 0[ \\ px - x & \text{sur } [0, +\infty[ \end{cases}$$

$$x \in ]-\infty, 0[ : f^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ +\infty & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$$x \in [0, +\infty[ : f^*(p) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p - 1 > 0 \\ 0 & \text{si } p - 1 < 0 \end{cases}$$

$$f^*(p) = \begin{cases} +\infty & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } 1 \geq p > 0 \\ +\infty & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$$f^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \in [0, 1] \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } x \leq 0 \\ x^2 & \text{sur } x \geq 0 \end{cases}$$

$$px - f(x) = \begin{cases} px & \text{sur } x < 0 \\ px - x^2 & \text{sur } x \geq 0 \end{cases}$$

$$x < 0 \quad f^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > 0 \\ +\infty & \text{si } p < 0 \end{cases}$$

$$x > 0 \quad f^*(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{4} & \end{cases}$$

$$f^*(y) = \begin{cases} \frac{y^2}{4} & \text{si } y > 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

6)  $\bar{x}^4 - x^4 \geq y(\bar{x} - x)$

$$(\bar{x}^2 - x^2)(\bar{x}^2 + x^2)$$

$$(\bar{x} - x)(\bar{x} + x)(\bar{x}^2 + x^2) \geq y(\bar{x} - x)$$

$x^4$  est régulière donc  $\partial f(x) = 4x^3$ .

7)  $f(x) = |x - 1|$

pour  $x > 1$ ,  $\partial f(x) = 1$

$x < 1$ ,  $\partial f(x) = -1$

$x = 1$

$$|\bar{x} - 1| - 0 \geq y(\bar{x} - 1)$$

$$\begin{array}{l} \bar{x} > 1 \Rightarrow y \leq 1 \\ \bar{x} < 1 \Rightarrow y \geq -1 \end{array}$$

donc  $\partial f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ [-1, 1] & \text{si } x = 1 \\ -1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

8)  $f(x) = \max(0, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$x > 0$   $\partial f(x) = 1$

$x < 0$   $\partial f(x) = 0$

$x = 0$

$$f(\bar{x}) - 0 \geq y(\bar{x} - 0)$$

$$\begin{array}{l} \text{si } \bar{x} > 0 \\ \text{si } \bar{x} < 0 \end{array} \quad 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \bar{x}y \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$$

donc  $\partial f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ [0, 1] & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

9)  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

si  $x < 0$   $f(\bar{x}) \geq y(\bar{x} - x)$

$\bar{x} < 0$   $0 \geq y(\bar{x} - x)$

$y \geq 0$  si  $\bar{x} - x < 0$   
 $y \leq 0$  si  $\bar{x} - x > 0$

$y = 0$

si  $x \geq 0$   $f(\bar{x}) - x^2 \geq y(\bar{x} - x)$ .  $f$  dérivable sur  $x \geq 0$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$



10).  $f(x) = |x^2 - 1|$

$$px - f(x) = \begin{cases} px + x^2 - 1 & -1 \leq x \leq 1 \\ px - x^2 + 1 & |x| > 1 \end{cases}$$

si  $|x| > 1$   
 $x = \frac{p}{2} \Rightarrow |p| \geq 2$   $f^*(p) = \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} + 1 = \frac{p^2}{4} + 1$

si  $|x| < 1$   
 $x = -\frac{p}{2}$   $f^*(p) = -\frac{p^2}{2} + \frac{p^2}{4} - 1 = -\frac{p^2}{4} - 1$

$|p| \leq 2$

$$f^*(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{4} + 1 & \text{si } |p| > 2 \\ -\frac{p^2}{4} - 1 & \text{si } |p| < 2 \\ p & \text{si } |p| = 2 \end{cases}$$

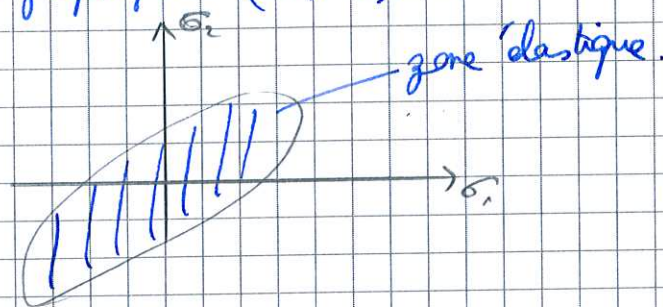
### exercice 5

1. domaine élastique :  $\dot{a} = 0$

fixé à  $\frac{\partial \phi}{\partial a}(0) = 0$  avec initialement  $a = 0$

$$\frac{1}{2} A'(0) E E : E + w'(0) = 0$$

2. On représente ce domaine par une ellipse dans un graphique  $(\sigma_1, \sigma_2)$



$$4. \quad \frac{\partial \phi}{\partial a} = 0 = \frac{1}{2} \frac{-(1+\gamma a) - \gamma(1-a) E E^2 + k}{(1+\gamma a)^2}$$

$$\text{donc} \quad \frac{+(1+\gamma)}{2(1+\gamma a)^2} E E^2 = k$$

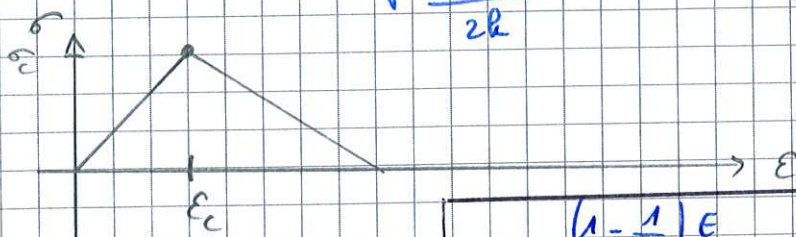
$$(1+\gamma a)^2 = \frac{(1+\gamma) E E^2}{2k}$$

$$a = \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{(1+\gamma) E E^2}{2k}} - 1 \right)$$

$$5. \quad \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial E} = A(a) E E$$

$$\sigma = \frac{1 - \frac{1}{\gamma} \left( \sqrt{\frac{(1+\gamma) E E^2}{2k}} - 1 \right)}{\sqrt{\frac{(1+\gamma) E E^2}{2k}}} E E.$$

$$\sigma \sim \text{cte} - \tilde{k} E$$



$$\sigma = \frac{\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) E}{\sqrt{\frac{(1+\gamma) E}{2k}}} - \frac{1}{\gamma} E E.$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{E}} = A(\omega) \mathcal{E} \mathcal{E}.$$

avant endommagement :  $\sigma = E \mathcal{E}.$

$$E = \frac{1}{2} E E_0^2 + \dots$$